Universität Potsdam – Wintersemester 2026/27

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

- Sie erkennen den Nutzen der **Hochschulmathematik** bei der Entscheidungsfindung zur Spezifizierung und Strukturierung der **Schulmathematik** auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes.
- Sie kennen geeignete Quellen zur Beantwortung der Fragen auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatz
- Sie kennen verschiedene Möglichkeiten, Mathematik zu strukturieren.
- Sie können beschreiben, woher die verschiedenen Strukturierungs-möglichkeiten kommen.

CC BY SA

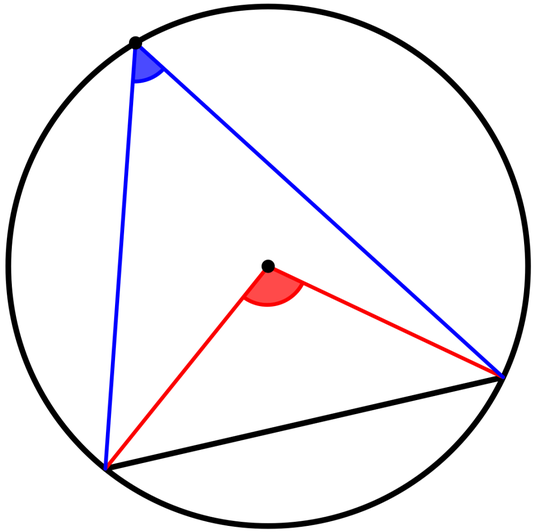
	Spezifizieren	Strukturieren
formale Ebene	- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden? - Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?	- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden? - Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

(angelehnt an Hußmann & Prediger, 2016)

Sätze am Kreis

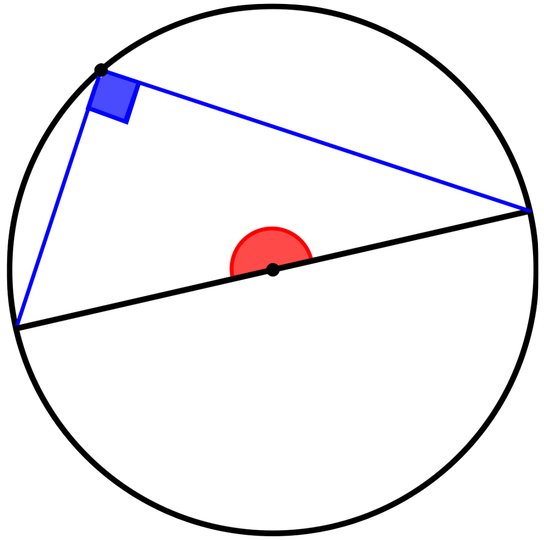
Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.



Peripheriewinkelsatz

Alle **Peripheriewinkel** auf derselben Seite über derselben Sehne sind gleich groß.



Satz des Thales

Alle **Peripheriewinkel** über dem **Durchmesser** eines Kreises haben eine Größe von 90°.

und seine Umkehrung

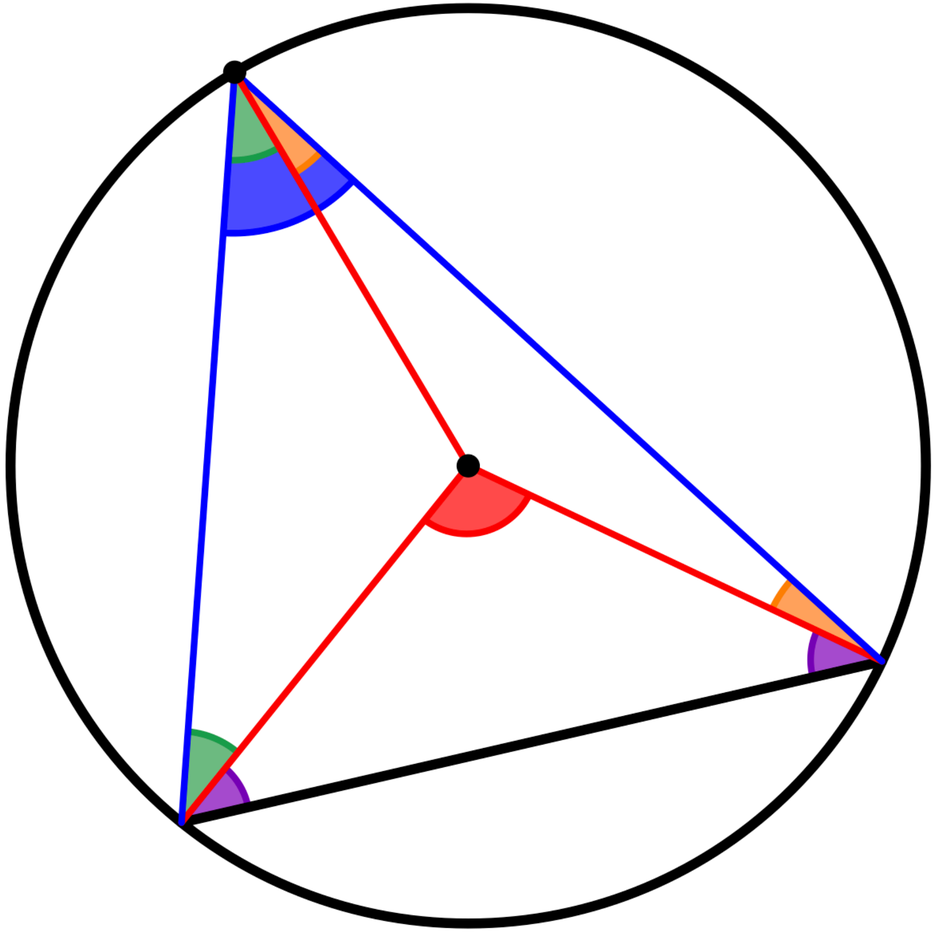
Der Mittelpunkt der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist Mittelpunkt eines Kreises durch alle drei Ecken des Dreiecks.

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Sätze am Kreis

Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.

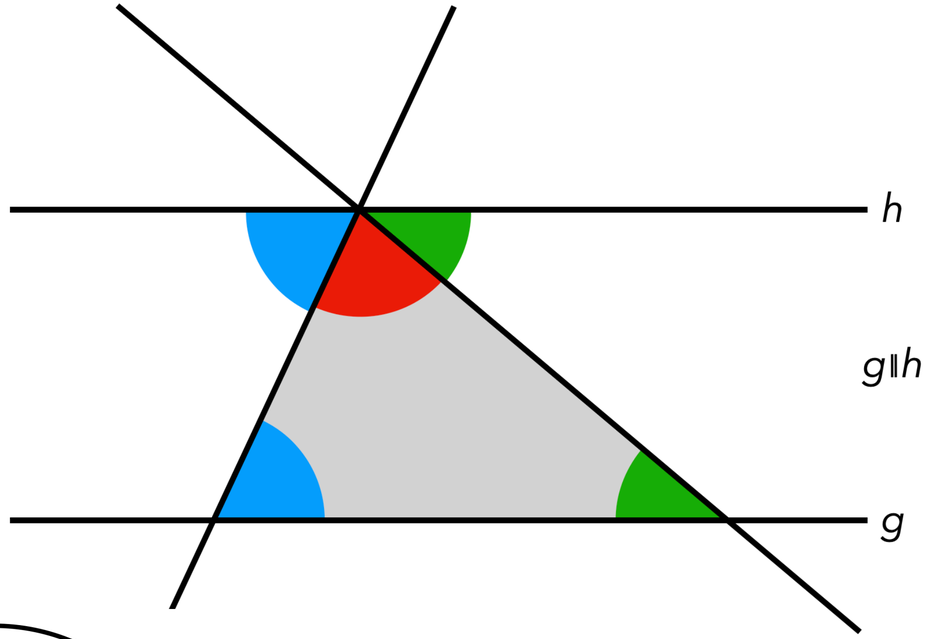


Peripheriewinkelsatz
Satz des Thales
und seine Umkehrung

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

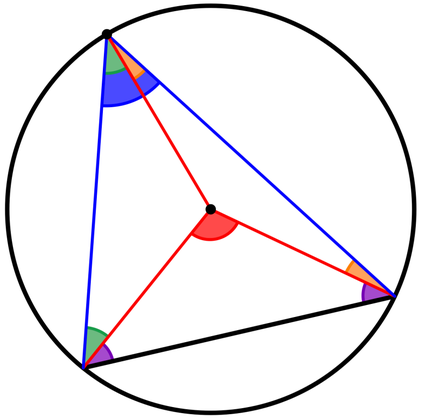
Sätze am Kreis

Seite-Winkel-Beziehung
Basiswinkelsatz
Innenwinkelsatz



Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.



Peripheriewinkelsatz
Satz des Thales
und seine Umkehrung

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?

- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Sätze am Kreis

Axiome der Elementargeometrie

empirische Erarbeitung

Wechselwinkelsatz

↓

Seite-Winkel-Beziehung

Basiswinkelsatz

Innenwinkelsatz

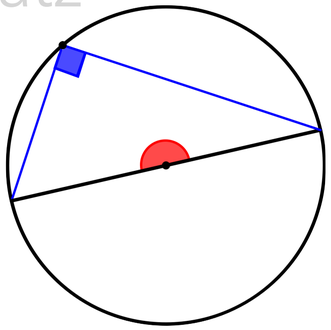
↓

Zentri-Peripheriewinkelsatz

Peripheriewinkelsatz

Satz des Thales

und seine Umkehrung



- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?

- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Sätze am Kreis

Wechselwinkelsatz

↓

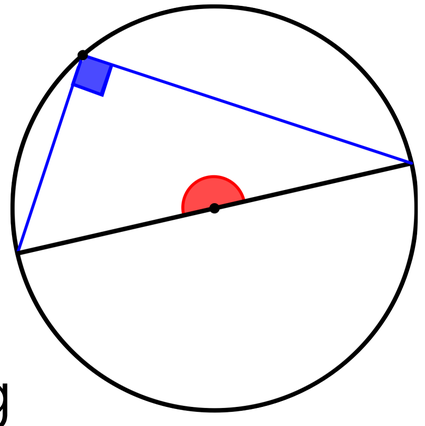
Basiswinkelsatz

Innenwinkelsatz

↓

Satz des Thales

und seine Umkehrung



Erster Entwurf eines Lernpfades aufgrund der stoffdidaktischen Analyse auf der formalen Ebene

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?

- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?



Welche Quellen helfen euch, diese Fragen zu beantworten?

- **fachmathematische Literatur**
- **Literatur über »Schulmathematik vom höheren Standpunkt«**
- **fachdidaktische Literatur (v. a. Bücher zur »Didaktik der …«)**
- Schulbücher
- Bildungsstandards, Rahmenlehrplan, schulinterne Curricula

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

fachliche und verstehensorientierte Durchdringung der Schulmathematik, »ohne im vollen Umfang auf das Instrumentarium der kanonischen […] [Hochschulmathematik] zurückgreifen zu müssen«

(Danckwerts, 2013, S. 87)



Schulmathematik → Hochschulmathematik → Schulmathematik

»doppelte Diskontinuität«

(Klein, 1967, S. 1; Erstausgabe 1908)

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Weiterführende Literatur

Felix Klein

Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus

(Klein, 1925, 1955, 1967)

Mathematik Neu Denken

(Beutelspacher et al., 2012)

Hans Freudenthal

Mathematik als pädagogische Aufgabe

(Freudenthal, 1973b, 1973c,
auch auf Englisch: Freudenthal, 1973a)

Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung

(Ableitinger et al., 2013)

Mathematik strukturieren



1. Sachgebiete
2. Leitideen
3. Stoffelement-Kategorien

1 Sachgebiete

Arithmetik

9 + 4

Leitfaden Arithmetik
(Benölken et al., 2018)

Algebra

2x = 8

Didaktik der Algebra
(Weigand et al., 2022)

Geometrie



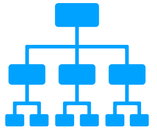
Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I
(Weigand et al., 2018)

Analysis



Didaktik der Analysis
(Greefrath et al., 2016)

Stochastik



Didaktik der Stochastik für die Sekundarstufe I
(Krüger et al., 2015)

Lin. Algebra / Analytische Geometrie



Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra
(Henn & Filler, 2015)

Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II
(Tietze et al., 2000a, 2000b, 2002)

2 Leitideen (inhaltsbezogene Kompetenzen)

»Kulturhoheit der Länder«
(Grundgesetz, Artikel 30)



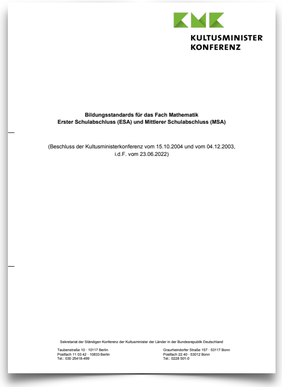
(CC-BY-SA-3.0 TUBS, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Locator_map_Brandenburg_in_Germany.svg)



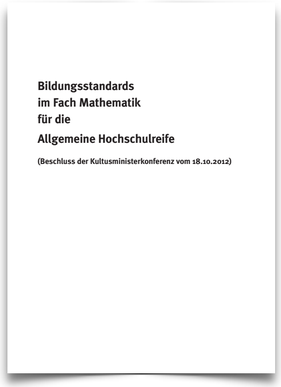
(MBJS, 2023)



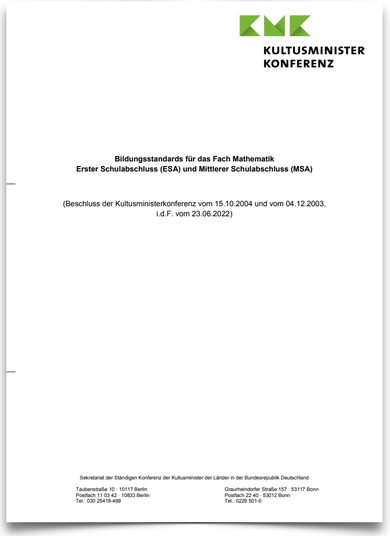
(MBJS, 2022)



(KMK, 2022)



(KMK, 2012)



KULTUSMINISTER KONFERENZ

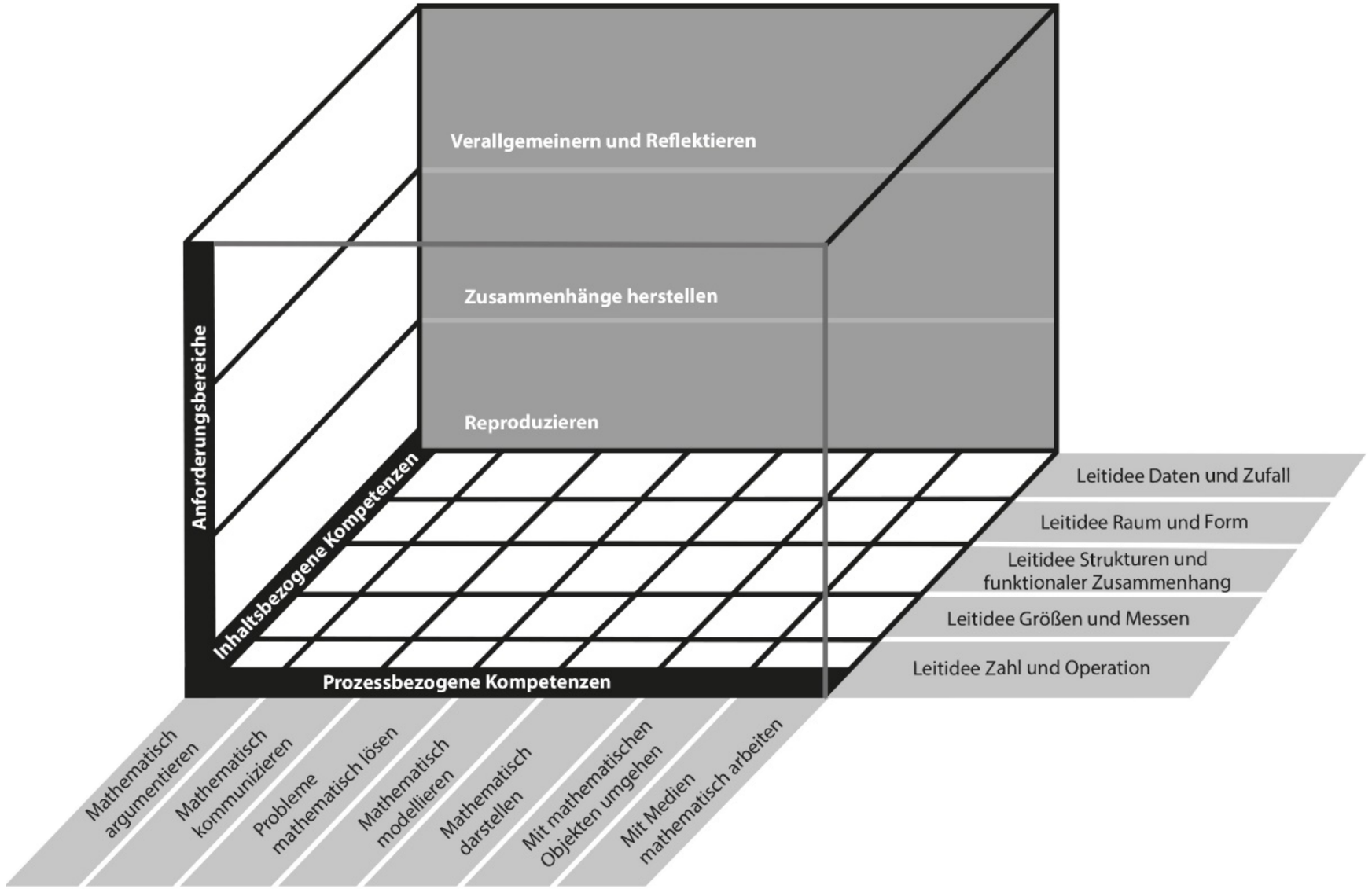
Bildungsstandards für das Fach Mathematik
Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003,
i.d.F. vom 23.06.2022)

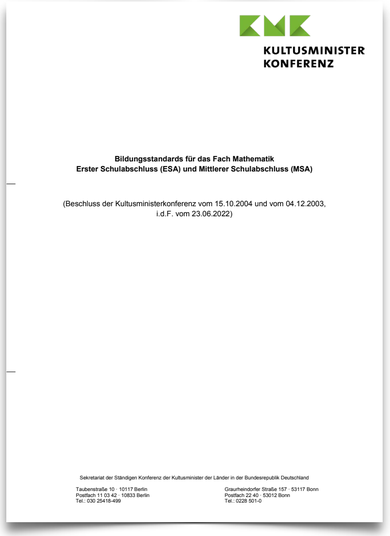
Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland

Taubenstraße 10 · 10117 Berlin
Postfach 11 03 42 · 10833 Berlin
Tel.: 030 254 95-499

Graurheindorfer Straße 157 · 53117 Bonn
Postfach 22 40 · 53012 Bonn
Tel.: 0228 501-0



(KMK, 2022, S. 8)


KULTUSMINISTER KONFERENZ

Bildungsstandards für das Fach Mathematik
Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022)

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland

2 Leitideen

Leitidee Zahl und Operation

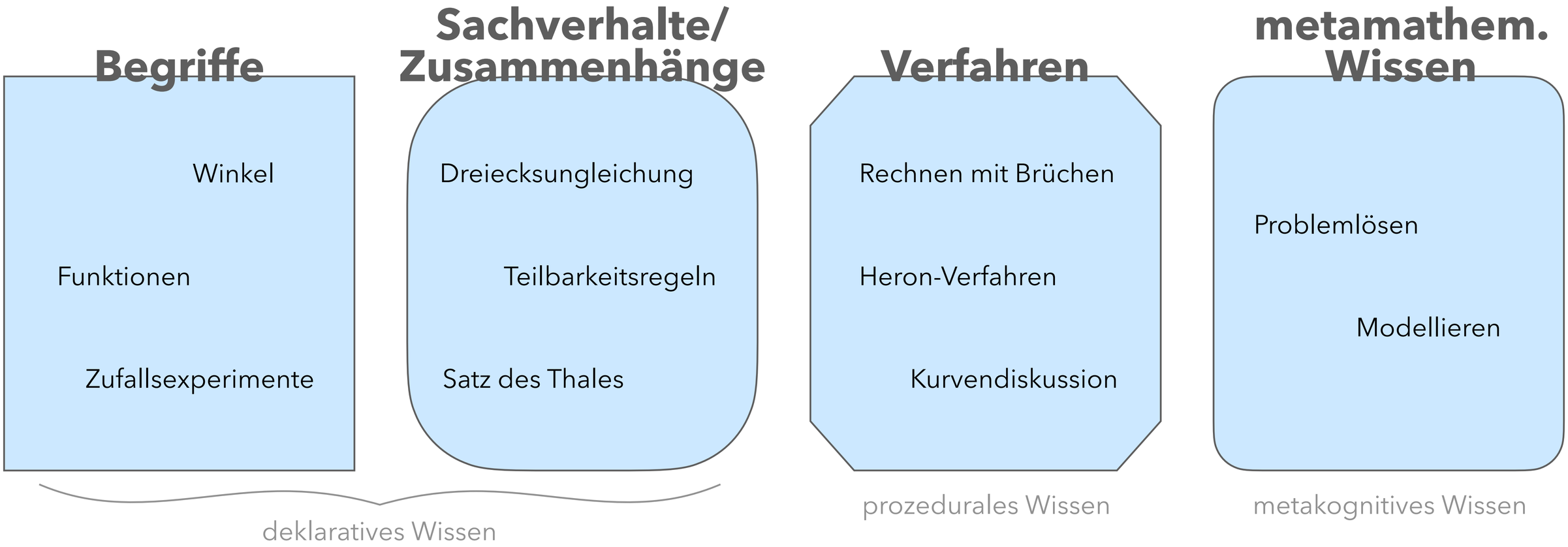
Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von reellen Zahlen (z. B. Vollständigkeit der Zahlengerade),
- nutzen sinntragende Vorstellungen von Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweiser, halbschriftlicher Verfahren),
- untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen,
- beschreiben die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sowie von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ an Beispielen,
- erläutern an Beispielen die verschiedenen Vorstellungen zum Bruchbegriff (insbesondere Teile eines oder mehrerer Ganzer, relative Anteile),
- nutzen Rechengesetze (z. B. Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz), auch zum vorteilhaften Rechnen,
- nutzen Überschlagsrechnungen zur Orientierung und zur Kontrolle,
- runden Zahlen dem Sachverhalt entsprechend sinnvoll,
- prüfen und interpretieren Ergebnisse, auch in Sachsituationen,
- erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,
- verwenden Prozent- und Zinsrechnung vorstellungsbasiert (z. B. Prozentstreifen) und sachgerecht,
- erläutern Potenzen und Wurzeln und berechnen einfache Potenzen und Wurzeln,
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,
- wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen und führen diese aus (z. B. schriftliche Rechenoperationen sowie bei Wurzeln und Potenzen),
- implementieren ein algorithmisches Verfahren (z. B. Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln, Intervallschachtelung) mit digitalen Mathematikwerkzeugen,
- führen in konkreten Situationen systematische Zählprinzipien aus (z. B. Anzahl Händeschütteln, wenn man jeder Person die Hand gibt),
- führen Zahlenfolgen fort, auch unter Verwendung von Variablen als allgemeine Zahl.

(KMK, 2022, S. 15 f.)

3 Stoffelement-Kategorien



(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)

Kenntnisse/Fähigkeiten/Fertigkeiten über …

Begriffe

- die Bezeichnung des Begriffs kennen
- Beispiele angeben und jeweils begründen können, weshalb es sich um ein Beispiel handelt
- begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt
- charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen
- Oberbegriffe, Unterbegriffe und Nachbarbegriffe kennen
- mit dem Begriff beim Argumentieren und Problemlösen arbeiten können

Sachverhalte/ Zusammenhänge

- den Sachverhalt angemessen formulieren können
- Beispiele für den Sachverhalt angeben können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen der Sachverhalt gilt
- den Sachverhalt begründen können
- Konsequenzen des Sachverhalts kennen
- Anwendungen des Sachverhalts kennen

Verfahren

- wissen, was man damit erreicht
- wissen, wie es geht
- es auf Beispiele anwenden können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen es funktioniert
- wissen, warum es funktioniert

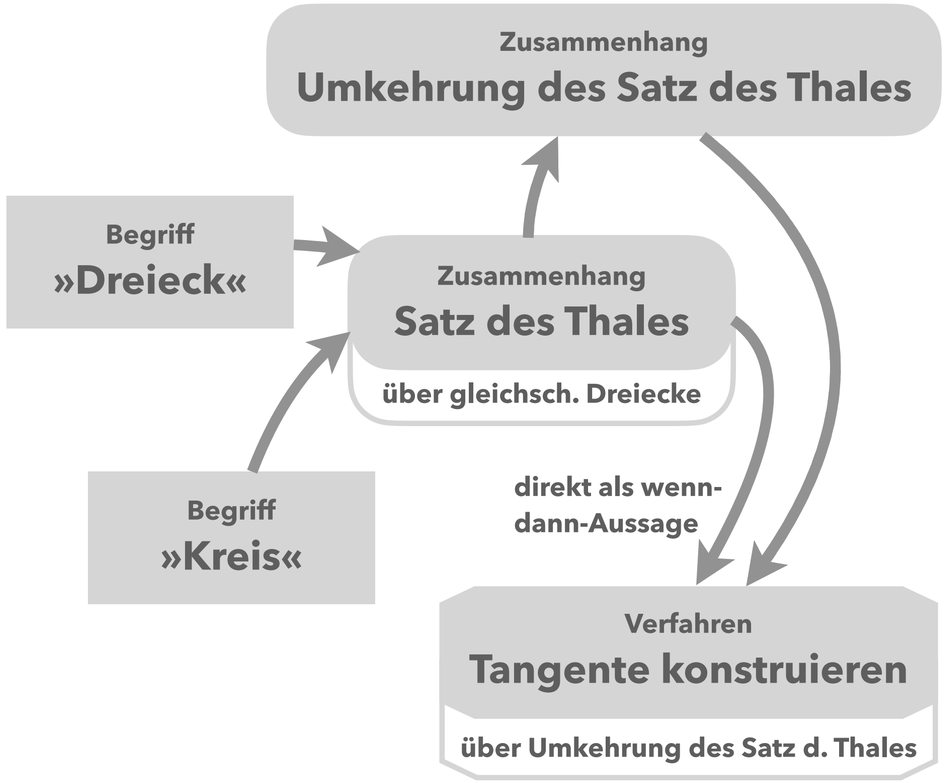
(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)

1. Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren (unstrukturiert) sammeln
Fachliteratur, fachdid. Literatur, RLP/SchiC, Bildungsstandards, Schulbücher

2. Begründungsideen skizzieren
Fachliteratur, fachdid. Literatur, ggf. Schulbücher

3. Abhängigkeiten darstellen

4. Fachlich Entscheidendes und weniger Entscheidendes identifizieren
Fachliteratur, fachdid. Literatur



Spezifizieren

Welche Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sollen erarbeitet werden?

Wie können die Zusammenhänge und Verfahren **formal begründet** werden?

Strukturieren

Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren **logisch strukturiert** werden?

Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

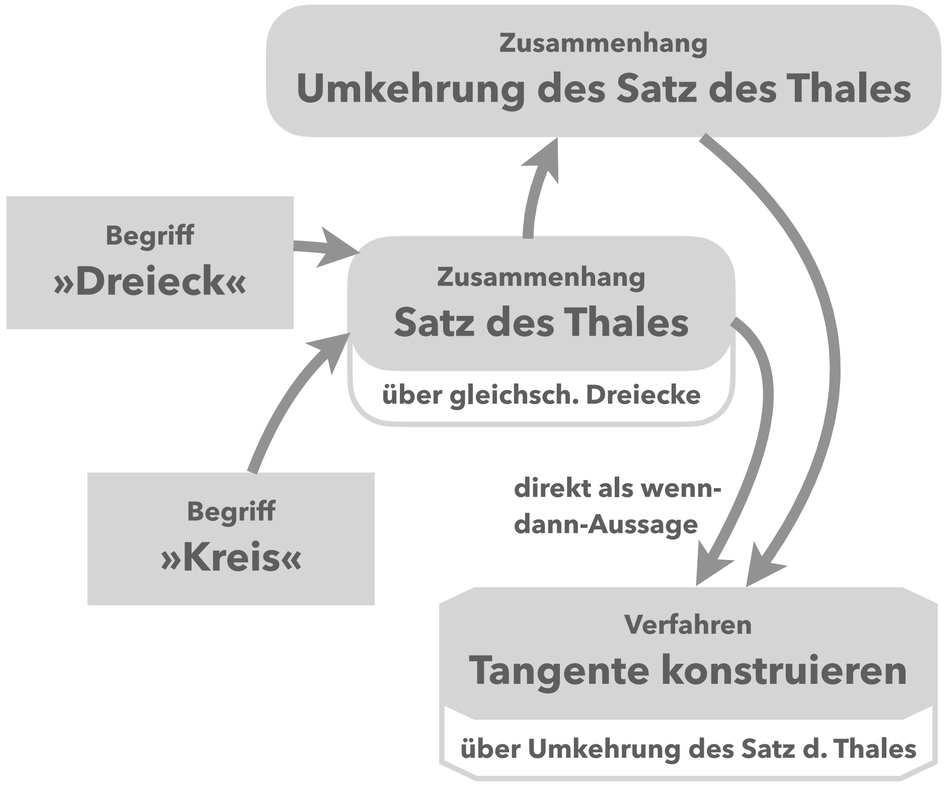
Zusammenfassung
Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

Stoffelement-Kategorien

- Begriffe
- Zusammenhänge
- Verfahren

Leitideen

- Zahl & Operation
- Raum & Form
- Größen & Messen
- Strukturen & fkt. Zusammenhang
- Daten & Zufall



Heiko Etzold, 2026

Literatur

Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8

Benölken, R., Gorski, H.-J., & Müller-Philipp, S. (2018). *Leitfaden Arithmetik: Für Studierende der Lehrämter*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22852-1

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8250-9

Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"! In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_5

Freudenthal, H. (1973a). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1973b). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Klett.

Freudenthal, H. (1973c). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Literatur

Grundgesetz für die Bundesrepublik Deutschland. https://www.gesetze-im-internet.de/gg/BJNR000010949.html

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Klein, F. (1925). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus II. Geometrie*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-90852-1

Klein, F. (1955). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus III. Präzisions- und Approximationsmathematik* (C. H. Müller, Hrsg.). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00246-9

Klein, F. (1967). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus I. Arithmetik, Algebra, Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11652-4

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3

Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23–52). Volk und Wissen.

Literatur

[MBJS] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2023). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1–10*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma_GenF_1.pdf

[MBJS] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022). *Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf

[KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland . (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

[KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6

Literatur

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1